广义逆算子乘积的不变性

付石琴，　刘晓冀*

(广西民族大学 理学院，广西 南宁 530006)

摘要:广义逆乘积的不变性在理论研究中扮演着重要的角色. 最早有研究者用秩的方法给出了一些条件来说明矩阵乘积的不变性. 近年来,关于广义逆算子乘积的不变性研究也做出了相应的成果. 主要通过把有界线性算子表示成矩阵形式的方法来进一步研究有界线性算子乘积 $\boldsymbol{AC}^{(1,2,3)}\boldsymbol{B}^{(1,2,3)}\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{AC}^{(1,2,4)}\boldsymbol{B}^{(1,2,4)}\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{AC}^{(1,3,4)}\boldsymbol{B}^{(1,3,4)}\boldsymbol{D}$ 的不变性,给出了相应不变性成立的等价条件;同时,还得到了广义逆算子值域包含的不变性的等价条件.

关键词:广义逆; 不变性; 算子乘积

中图分类号:O151　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1001－8395(2016)02－0185－06

doi:10.3969/j.issn.1001－8395.2016.02.006

设 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 是 Hilbert 空间,$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{K})$ 表示从 $\boldsymbol{H}$ 到 $\boldsymbol{K}$ 中的有界线性算子全体构成的空间. 对任意 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{L}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{K})$,记 $\boldsymbol{A}^*$、$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})$ 和 $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A})$ 分别表示算子 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置、值域和核空间.

设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{L}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{K})$,若存在 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{L}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{H})$ 满足:

$$\boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{XAX}=\boldsymbol{X},$$

$$(\boldsymbol{AX})^*=\boldsymbol{AX},\quad (\boldsymbol{XA})^*=\boldsymbol{XA},$$

则称 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore－Penrose 逆,记为 $\boldsymbol{A}^{\dagger}$[1-4],对广义逆及其应用的研究取得许多成果[5-8]. 众所周知,$\boldsymbol{A}^{\dagger}$ 存在当且仅当 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})$ 是闭值域. 设 $i\in\{1,2,3,4\}$,若 $\boldsymbol{X}$ 满足上式,则称 $\boldsymbol{X}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{i\}$－逆,记为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{(i)}$. 文献[2]讨论了矩阵乘积 $\boldsymbol{AB}^{(1)}\boldsymbol{C}$ 的不变性,作者用秩的方法给出了一些条件来说明矩阵乘积 $\boldsymbol{AB}^{(1)}\boldsymbol{C}$ 的不变性. 从那以后,许多研究者对不变性进行了探索和研究[9-14],例如,在文献[9－10]中分别给出了值域 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{AB}^{(1)}\boldsymbol{C})$ 和 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{AB}^{(1)}\boldsymbol{C})$ 不变性的条件. 最近,文献[13]讨论了矩阵乘积 $\boldsymbol{KL}^{(1)}\boldsymbol{M}^{(1)}\boldsymbol{N}$ 不变性的条件. 文献[15]用秩的方法研究了矩阵乘积值域包含的不变性. 文献[16]通过把有界线性算子表示成矩阵的形式的方法来具体研究算子乘积 $\boldsymbol{AC}^{(1)}\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{D}$ 的不变性,以及其算子广义逆值域包含的不变性.

本文进一步研究算子乘积 $\boldsymbol{AC}^{(1,2,3)}\boldsymbol{B}^{(1,2,3)}\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{AC}^{(1,2,4)}\boldsymbol{B}^{(1,2,4)}\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{AC}^{(1,3,4)}\boldsymbol{B}^{(1,3,4)}\boldsymbol{D}$ 的不变性,以此得到相应的等价条件,并且讨论这些算子广义逆的值域包含的不变性.

1　引理

类似文献[1]的习题 11～13 中给出矩阵的广义逆,从而得到如下引理 1.1.

引理 1.1　设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{L}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{K})$,则有:

(i) $\boldsymbol{A}\{1,2,3\}=\{\boldsymbol{A}^{(1,2,3)}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(1,2,3)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{ZA}^{(1,2,3)}:\boldsymbol{Z}\in\boldsymbol{L}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{H})\}$;

(ii) $\boldsymbol{A}\{1,2,4\}=\{\boldsymbol{A}^{(1,2,4)}+\boldsymbol{A}^{(1,2,4)}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AA}^{(1,2,4)}):\boldsymbol{Z}\in\boldsymbol{L}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{H})\}$;

(iii) $\boldsymbol{A}\{1,3,4\}=\{\boldsymbol{A}^{(1,3,4)}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(1,3,4)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AA}^{(1,3,4)}):\boldsymbol{Z}\in\boldsymbol{L}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{H})\}$.

引理 1.2[17]　设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{L}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{K})$ 有闭值域,$\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{H}_2$ 是 $\boldsymbol{H}$ 的闭子空间且 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_1\oplus\boldsymbol{H}_2$,$\boldsymbol{K}_1$ 和 $\boldsymbol{K}_2$ 是 $\boldsymbol{K}$ 的闭子空间且 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_1\oplus\boldsymbol{K}_2$,则算子 $\boldsymbol{A}$ 有如下 3 个矩阵表示:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}^*)\\ \boldsymbol{N}(\boldsymbol{A})\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})\\ \boldsymbol{N}(\boldsymbol{A}^*)\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1$ 可逆,且

$$\boldsymbol{A}^{\dagger}=\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{AA}^*)^{\dagger}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\tag{1}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}_1\\ \boldsymbol{H}_2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})\\ \boldsymbol{N}(\boldsymbol{A}^*)\end{pmatrix},$$

收稿日期:2015－01－07

基金项目:国家自然科学基金(11361009)和广西自然科学基金(2013GXNSFAA019008)

＊通信作者简介:刘晓冀(1972—),男,教授,主要从事广义逆理论及其应用的研究,E－mail:xiaojiliu72@126.com

$$A^{\dagger}=A^{*}(AA^{*})^{\dagger}=\begin{pmatrix}A_1^{*}D^{-1} & 0\\ A_2^{*}D^{-1} & 0\end{pmatrix},\qquad(2)$$

其中

$$D=A_1A_1^{*}+A_2A_2^{*}:R(A)\rightarrow R(A),$$

且 $D>0$.

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ A_2 & 0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}R(A^{*})\\ N(A)\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}K_1\\ K_2\end{pmatrix},$$

此时

$$A^{\dagger}=A^{*}(AA^{*})^{\dagger}=\begin{pmatrix}E^{-1}A_1^{*} & E^{-1}A_2^{*}\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad(3)$$

其中

$$E=A_1^{*}A_1+A_2^{*}A_2:R(A^{*})\rightarrow R(A^{*}),$$

且 $E>0$.

引理 1.3[16] 若 $A\in L(H,K)$ 和 $B\in L(M,N)$,则对任意 $W\in L(N,H)$,$AWB=0$ 当且仅当 $A=0$ 或 $B=0$.

引理 1.4[16] 设 $A\in L(H,K)$ 有一闭值域,$B\in L(M,N)$,则有

$$R(B^{*})\subseteq R(A^{*})\Leftrightarrow BA^{\dagger}A=B.$$

2 算子乘积的不变性

定理 2.1 设非零算子 $A\in L(H,K)$、$B\in L(M,N)$、$C\in L(H,M)$ 和 $D\in L(K,N)$ 都有闭值域,那么下面陈述(i)和(ii)等价. 如果 $AC^{\dagger}B^{\dagger}D$ 有闭值域,则下面3个陈述等价:

(i) 对任意 $C^{(1,2,3)}\in C\{1,2,3\}$ 和 $B^{(1,2,3)}\in B\{1,2,3\}$,$AC^{(1,2,3)}B^{(1,2,3)}D$ 不变;

(ii) $R((AC^{\dagger})^{*})\subseteq R(B^{*})$ 且 $R(A^{*})\subseteq R(C^{*})$;或者 $R(D)\subseteq N(B^{*})$;或者 $R((C^{*})^{\dagger})\subseteq R(B^{*})$ 且 $R(D)\subseteq N(B^{\dagger}C^{\dagger})$;

(iii) 对任意 $C^{(1,2,3)}\in C\{1,2,3\}$ 和 $B^{(1,2,3)}\in B\{1,2,3\}$,$R(AC^{(1,2,3)}B^{(1,2,3))}D)$ 不变.

证明 (i)⇒(ii) 由于对任意 $C^{(1,2,3)}\in C\{1,2,3\}$ 和 $B^{(1,2,3)}\in B\{1,2,3\}$,$AC^{(1,2,3)}B^{(1,2,3)}D$ 保持不变,则有

$$AC^{(1,2,3)}B^{(1,2,3)}D=AC^{\dagger}B^{\dagger}D.\qquad(4)$$

根据引理 1.1,设

$$C^{(1,2,3)}=C^{\dagger}+(I-C^{\dagger}C)VC^{\dagger},$$

和

$$B^{(1,2,3)}=B^{\dagger}+(I-B^{\dagger}B)UB^{\dagger},$$

且把这2个式子代入(4)式中,则有

$$A(C^{\dagger}+(I-C^{\dagger}C)VC^{\dagger})(B^{\dagger}+(I-B^{\dagger}B)UB^{\dagger})D=AC^{\dagger}B^{\dagger}D,$$

即

$$A(I-C^{\dagger}C)VC^{\dagger}B^{\dagger}D+AC^{\dagger}(I-B^{\dagger}B)UB^{\dagger})D+A(I-C^{\dagger}C)VC^{\dagger}(I-B^{\dagger}B)UB^{\dagger})D=0.$$

因为 V 和 U 的任意性,那么

$$A(I-C^{\dagger}C)VC^{\dagger}B^{\dagger}D=0,$$
$$AC^{\dagger}(I-B^{\dagger}B)UB^{\dagger})D=0,$$
$$A(I-C^{\dagger}C)VC^{\dagger}(I-B^{\dagger}B)UB^{\dagger})D=0.$$

又根据引理 1.3 有:$A(I-C^{\dagger}C)=0$,或者 $C^{\dagger}B^{\dagger}D=0$;$AC^{\dagger}(I-B^{\dagger}B)=0$,或者 $B^{\dagger}D=0$;$A(I-C^{\dagger}C)=0$,或者 $C^{\dagger}(I-B^{\dagger}B)=0$,或者 $B^{\dagger}D=0$. 因此,$A(I-C^{\dagger}C)=0$ 且 $AC^{\dagger}(I-B^{\dagger}B)=0$;或者 $B^{\dagger}D=0$;或者 $C^{\dagger}B^{\dagger}D=0$ 且 $C^{\dagger}(I-B^{\dagger}B)=0$. 所以,$A=AC^{\dagger}C$ 且 $AC^{\dagger}=AC^{\dagger}B^{\dagger}B$;或者 $B^{\dagger}D=0$;或者 $C^{\dagger}B^{\dagger}D=0$ 且 $C^{\dagger}=C^{\dagger}B^{\dagger}B$,即 $R((AC^{\dagger})^{*})\subseteq R(B^{*})$ 且 $R(A^{*})\subseteq R(C^{*})$;或者 $R(D)\subseteq N(B^{*})$;或者 $R((C^{*})^{\dagger})\subseteq R(B^{*})$ 和 $R(D)\subseteq N(B^{\dagger}C^{\dagger})$.

(ii)⇒(i) 根据引理 1.4,由(ii)可以得到 $A=AC^{\dagger}C$ 和 $AC^{\dagger}=AC^{\dagger}B^{\dagger}B$;或者 $B^{*}D=0$,因此 $B^{\dagger}D=0$;或者 $C^{\dagger}B^{\dagger}D=0$ 和 $C^{\dagger}=C^{\dagger}B^{\dagger}B$. 根据引理 1.1

$$AC^{(1,2,3)}B^{(1,2,3)}D=$$
$$A(C^{\dagger}+(I-C^{\dagger}C)VC^{\dagger})(B^{\dagger}+(I-B^{\dagger}B)UB^{\dagger})D=$$
$$AC^{\dagger}(B^{\dagger}+(I-B^{\dagger}B)UB^{\dagger})D=AC^{\dagger}B^{\dagger}D,$$

显然,结论(i)是正确的.

现在考虑在 $AC^{\dagger}B^{\dagger}D$ 有闭值域的情况下,显然(i)⇒(iii). 下面将证明(iii)⇒(ii).

由于对任意 $C^{(1,2,3)}\in C\{1,2,3\}$ 和 $B^{(1,2,3)}\in B\{1,2,3\}$,$R(AC^{(1,2,3)}B^{(1,2,3)}D)=R(AC^{\dagger}B^{\dagger}D)$ 成立,则 $AC^{(1,2,3)}B^{(1,2,3)}D$ 有闭值域,且有

$$(AC^{\dagger}B^{\dagger}D)(AC^{\dagger}B^{\dagger}D)^{\dagger}=$$
$$(AC^{(1,2,3)}B^{(1,2,3)}D)(AC^{(1,2,3)}B^{(1,2,3)}D)^{\dagger}.$$

把

$$C^{(1,2,3)}=C^{\dagger}+(I-C^{\dagger}C)VC^{\dagger},$$
$$B^{(1,2,3)}=B^{\dagger}+(I-B^{\dagger}B)UB^{\dagger},$$

代入到上面的等式中,可得

$$(AC^{\dagger}B^{\dagger}D)(AC^{\dagger}B^{\dagger}D)^{\dagger}=$$
$$(AC^{\dagger}B^{\dagger}D+\Delta)(AC^{\dagger}B^{\dagger}D+\Delta)^{\dagger},$$

其中

$$\Delta=A(I-C^{\dagger}C)VC^{\dagger}B^{\dagger}D+AC^{\dagger}(I-B^{\dagger}B)UB^{\dagger}D+A(I-C^{\dagger}C)VC^{\dagger}(I-B^{\dagger}B)UB^{\dagger}.$$

由于 V 和 U 的任意性,上面的式子可以推出 $\Delta=0$,

因此,陈述(ii)成立.

推论 2.1 设非零线性算子 $A\in L(H,K)$、$B\in L(M,N)$、$C\in L(H,M)$ 和 $D\in L(K,N)$ 都有闭值域,则对任意 $C^{(1,2,3)}\in C\{1,2,3\}$ 和 $B^{(1,2,3)}\in B\{1,2,3\}$, $AC^{(1,2,3)}B^{(1,2,3)}D=0$ 成立当且仅当 $R((AC^{\dagger})^{*})\subseteq R(B^{*})$、$R(A^{*})\subseteq R(C^{*})$ 和 $R(B^{\dagger}D)\subseteq R(AC^{\dagger})$;或者 $R(D)\subseteq N(B^{*})$;或者 $R((C^{*})^{\dagger})\subseteq R(B^{*})$ 且 $R(D)\subseteq N(B^{\dagger}C^{\dagger})$.

推论 2.2 设非零线性算子 $A\in L(H,K)$、$B\in L(M,N)$ 和 $C\in L(H,M)$ 都有闭值域,那么下面的结论等价:

(i) 对任意 $B^{(1,2,3)}\in B\{1,2,3\}$, $AB^{(1,2,3)}C$ 不变;

(ii) $R(A^{*})\subseteq R(B^{*})$;或者 $R(C)\subseteq N(B^{*})$.

因 $X\in A\{1,2,3\}$ 当且仅当 $X^{*}\in A^{*}\{1,2,3\}$,则根据定理2.1可得到下面的定理和推论.

定理 2.2 设非零算子 $A\in L(H,K)$、$B\in L(M,N)$、$C\in L(H,M)$ 和 $D\in L(K,N)$ 都有闭值域,那么下面陈述(i)和(ii)等价. 如果 $AC^{\dagger}B^{\dagger}D$ 有闭值域,则下面3个陈述等价:

(i) 对任意 $C^{(1,2,4)}\in C\{1,2,4\}$ 和 $B^{(1,2,4)}\in B\{1,2,4\}$, $AC^{(1,2,4)}B^{(1,2,4)}D$ 不变;

(ii) $R(B^{\dagger}C^{\dagger})\subseteq N(A)$ 且 $R(B^{*})\subseteq R(C)$;或者 $R(D)\subseteq R(B)$ 且 $R(B^{\dagger}D)\subseteq R(C)$;或者 $R(C^{*})\subseteq N(A)$;

(iii) 对任意 $C^{(1,2,4)}\in C\{1,2,4\}$ 和 $B^{(1,2,4)}\in B\{1,2,4\}$, $R(AC^{(1,2,4)}B^{(1,2,4)}D)$ 不变.

推论 2.3 设非零线性算子 $A\in L(H,K)$、$B\in L(M,N)$、$C\in L(H,M)$ 和 $D\in L(K,N)$ 都有闭值域,则对任意 $C^{(1,2,4)}\in C\{1,2,4\}$ 和 $B^{(1,2,4)}\in B\{1,2,4\}$, $AC^{(1,2,4)}B^{(1,2,4)}D=0$ 成立当且仅当 $R(B^{\dagger}C^{\dagger})\subseteq N(A)$ 和 $R(B^{*})\subseteq R(C)$;或者 $R(D)\subseteq R(B)$、$R(B^{\dagger}D)\subseteq R(C)$ 和 $R(B^{\dagger}D)\subseteq N(AC^{\dagger})$;或者 $R(C^{*})\subseteq N(A)$.

推论 2.4 设非零线性算子 $A\in L(H,K)$、$B\in L(M,N)$ 和 $C\in L(H,M)$ 都有闭值域,那么下面的陈述等价:

(i) 对任意 $B^{(1,2,4)}\in B\{1,2,4\}$, $AB^{(1,2,4)}C$ 不变;

(ii) $R(B^{*})\subseteq N(A)$;或者 $R(C)\subseteq R(B)$.

定理 2.3 设非零算子 $A\in L(H,K)$、$B\in L(M,N)$、$C\in L(H,M)$ 和 $D\in L(K,N)$ 都有闭值域,那么下面陈述(i)和(ii)等价. 如果 $AC^{\dagger}B^{\dagger}D$ 有闭值域,则下面3个结论等价:

(i) 对任意 $C^{(1,3,4)}\in C\{1,3,4\}$ 和 $B^{(1,3,4)}\in B\{1,3,4\}$, $AC^{(1,3,4)}B^{(1,3,4)}D$ 不变;

(ii) $R((AC^{\dagger})^{*})\subseteq R(B^{*})$ 和 $R(A^{*})\subseteq R(C^{*})$;或者 $R(B^{\dagger}D)\subseteq R(C)$、$N(B)\subseteq R(C)$ 和 $R((AC^{\dagger})^{*})\subseteq R(B^{*})$;或者 $R(B^{\dagger}D)\subseteq R(C)$ 和 $R(D)\subseteq R(B)$;

(iii) 对任意 $C^{(1,3,4)}\in C\{1,3,4\}$ 和 $B^{(1,3,4)}\in B\{1,3,4\}$, $R(AC^{(1,3,4)}B^{(1,3,4)}D)$ 不变.

证明 (i)$\Rightarrow$(ii) 显然,对任意 $C^{(1,3,4)}\in C\{1,3,4\}$ 和 $B^{(1,3,4)}\in B\{1,3,4\}$, $AC^{(1,3,4)}B^{(1,3,4)}D$ 保持不变有

$$AC^{(1,3,4)}B^{(1,3,4)}D=AC^{\dagger}B^{\dagger}D. \tag{5}$$

根据引理1.1设

$$C^{(1,3,4)}=C^{\dagger}+(I-C^{\dagger}C)V(I-CC^{\dagger}),$$

和

$$B^{(1,3,4)}=B^{\dagger}+(I-B^{\dagger}B)U(I-BB^{\dagger}),$$

并且把其代入(5)式中,则有

$$A(C^{\dagger}+(I-C^{\dagger}C)V(I-CC^{\dagger}))(B^{\dagger}+(I-B^{\dagger}B)U(I-BB^{\dagger}))D=AC^{\dagger}B^{\dagger}D,$$

即可得到

$$A(I-C^{\dagger}C)V(I-CC^{\dagger})B^{\dagger}D+AC^{\dagger}(I-B^{\dagger}B)U(I-B^{\dagger}B)D+A(I-C^{\dagger}C)V(I-CC^{\dagger})(I-B^{\dagger}B)U(I-BB^{\dagger})D=0,$$

其中,V 和 U 是任意有界线性算子,那么

$$A(I-C^{\dagger}C)V(I-CC^{\dagger})B^{\dagger}D=0,$$
$$AC^{\dagger}(I-B^{\dagger}B)U(I-B^{\dagger}B)D=0,$$

和

$$A(I-C^{\dagger}C)V(I-CC^{\dagger})(I-B^{\dagger}B)U(I-BB^{\dagger})D=0.$$

根据引理1.3有 $A(I-C^{\dagger}C)=0$,或者 $(I-CC^{\dagger})B^{\dagger}D=0$; $AC^{\dagger}(I-B^{\dagger}B)=0$,或者 $(I-BB^{\dagger})D=0$; $A(I-C^{\dagger}C)=0$,或者 $(I-CC^{\dagger})(I-B^{\dagger}B)=0$,或者 $(I-BB^{\dagger})D=0$. 因此 $A(I-C^{\dagger}C)=0$ 和 $AC^{\dagger}(I-B^{\dagger}B)=0$;或者 $(I-BB^{\dagger})D=0$ 和 $(I-CC^{\dagger})B^{\dagger}D=0$;或者 $(I-CC^{\dagger})B^{\dagger}D=0$、$(I-CC^{\dagger})(I-B^{\dagger}B)=0$ 和 $AC^{\dagger}(I-B^{\dagger}B)=0$. 所以 $A=AC^{\dagger}C$ 和 $AC^{\dagger}=AC^{\dagger}B^{\dagger}B$;或者 $D=BB^{\dagger}D$ 和 $(I-CC^{\dagger})B^{\dagger}D=0$;或者 $AC^{\dagger}=AC^{\dagger}B^{\dagger}B$、$(I-CC^{\dagger})B^{\dagger}D=0$ 和 $(I-CC^{\dagger})(I-B^{\dagger}B)=0$,即 $R((AC^{\dagger})^{*})\subseteq R(B^{*})$ 和 $R(A^{*})\subseteq R(C^{*})$;或者 $R(D)\subseteq R(B)$ 和 $R(B^{\dagger}D)\subseteq R(C)$;或者 $R(B^{\dagger}D)\subseteq R(C)$、$N(B)\subseteq R(C)$ 和 $R((AC^{\dagger})^{*})\subseteq R(B^{*})$. 因此,结论(ii)成立.

(ii)$\Rightarrow$(i) 根据引理1.4,由陈述(ii)可知 A

$=AC^{\dagger}C$ 和 $AC^{\dagger}=AC^{\dagger}B^{\dagger}B$;由于 $N(I-CC^{\dagger})=R(C)$ 和 $R(I-B^{\dagger}B)=N(B)$,于是有 $(I-CC^{\dagger})B^{\dagger}D=0$ 和 $(I-CC^{\dagger})(I-B^{\dagger}B)=0$;或者 $D=BB^{\dagger}D$ 和 $(I-CC^{\dagger})B^{\dagger}D=0$. 根据引理1.1有

$$AC^{(1,3,4)}B^{(1,3,4)}D=A(C^{\dagger}+(I-C^{\dagger}C)V(I-CC^{\dagger}))(B^{\dagger}+(I-B^{\dagger}B)U(I-BB^{\dagger}))D=AC^{\dagger}(B^{\dagger}+(I-B^{\dagger}B)U(I-BB^{\dagger}))D=AC^{\dagger}B^{\dagger}D,$$

立即得到陈述(i).

现在考虑在 $AC^{\dagger}B^{\dagger}D$ 有闭值域的情况下,显然(i)⇒(iii). 下面证明(iii)⇒(ii).

对任意 $C^{(1,3,4)}\in C\{1,3,4\}$ 和 $B^{(1,3,4)}\in B\{1,3,4\}$,$R(AC^{(1,3,4)}B^{(1,3,4)}D)=R(AC^{\dagger}B^{\dagger}D)$ 成立,则 $AC^{(1,3,4)}B^{(1,3,4)}D$ 有闭值域,且

$$(AC^{\dagger}B^{\dagger}D)(AC^{\dagger}B^{\dagger}D)^{\dagger}=(AC^{(1,3,4)}B^{(1,3,4)}D)(AC^{(1,3,4)}B^{(1,3,4)}D)^{\dagger}.$$

类似地,设

$$C^{(1,3,4)}=C^{\dagger}+(I-C^{\dagger}C)V(I-CC^{\dagger}),$$

和

$$B^{(1,3,4)}=B^{\dagger}+(I-B^{\dagger}B)U(I-BB^{\dagger}),$$

把其代入到上面的等式可得

$$A(I-C^{\dagger}C)V(I-CC^{\dagger})B^{\dagger}D+AC^{\dagger}(I-B^{\dagger}B)U(I-B^{\dagger}B)D+A(I-C^{\dagger}C)V(I-CC^{\dagger})(I-B^{\dagger}B)U(I-BB^{\dagger})D=0.$$

显然,由于 U 和 V 的任意性,可得到(ii).

推论 2.5 设非零线性算子 $A\in L(H,K)$、$B\in L(M,N)$、$C\in L(H,M)$ 和 $D\in L(K,N)$ 都有闭值域,则对任意 $C^{(1,3,4)}\in C\{1,3,4\}$ 和 $B^{(1,3,4)}\in B\{1,3,4\}$,$AC^{(1,3,4)}B^{(1,3,4)}D=0$ 成立当且仅当 $R((AC^{\dagger})^{*})\subseteq R(B^{*})$、$R(A^{*})\subseteq R(C^{*})$ 和 $R(B^{\dagger}D)\subseteq N(AC^{\dagger})$;或者 $R(B^{\dagger}D)\subseteq R(C)$、$N(B)\subseteq R(C)$、$R((AC^{\dagger})^{*})\subseteq R(B^{*})$ 和 $R(B^{\dagger}D)\subseteq N(AC^{\dagger})$;或者 $R(B^{\dagger}D)\subseteq R(C)$、$R(D)\subseteq R(B)$ 和 $R(B^{\dagger}D)\subseteq N(AC^{\dagger})$.

推论 2.6 设非零线性算子 $A\in L(H,K)$、$B\in L(M,N)$ 和 $C\in L(H,M)$ 都有闭值域,那么下面的陈述等价:

(i) 对任意 $B^{(1,3,4)}\in B\{1,3,4\}$,$AB^{(1,3,4)}C$ 不变;

(ii) $N(B)\subseteq N(A)$;或者 $R(C)\subseteq R(B)$.

3 算子乘积的值域包含的不变性

定理 3.1 设非零线性算子 $A\in L(H,K)$、$B\in L(H,M)$、$C\in L(N,M)$ 和 $D\in L(G,K)$ 有闭值域,那么下面的结论等价:

(i) 对任意 $B^{(1,2,3)}\in B\{1,2,3\}$,$R(AB^{(1,2,3)}C)\subseteq R(D)$ 成立;

(ii) $R(A(I-BB^{\dagger}))\subseteq R(D)$ 和 $R(AB^{\dagger}C)\subseteq R(D)$;或者 $R(C)\subseteq N(B^{*})$.

证明 (i)⇒(ii) 根据引理1.2,可以得到下面的矩阵形式:

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}R(B^{*})\\ N(B)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}R(A)\\ N(A^{*})\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}R(B^{*})\\ N(B)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}R(B)\\ N(B^{*})\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}C_1 & 0\\ C_2 & 0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}R(C^{*})\\ N(C)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}R(B)\\ N(B^{*})\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}D_1 & 0\\ D_2 & 0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}R(D^{*})\\ N(D)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}R(A)\\ N(A^{*})\end{pmatrix},$$

$$B^{\dagger}=\begin{pmatrix}B_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}R(B)\\ N(B^{*})\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}R(B^{*})\\ N(B)\end{pmatrix},$$

$$D^{\dagger}=\begin{pmatrix}F^{-1}D_1^{*} & F^{-1}D_2^{*}\\ 0 & 0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}R(A)\\ N(A^{*})\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}R(D^{*})\\ N(D)\end{pmatrix},$$

其中,B_1 和 $F=D_1{}^{*}D_1+D_2{}^{*}D_2$ 分别在 $L(R(B^{*}),R(B))$ 和 $L(R(D^{*}))$ 上可逆. 根据引理1.1可知

$$B^{(1,2,3)}=B^{\dagger}+(I-B^{\dagger}B)XB^{\dagger}=\begin{pmatrix}B_1^{-1} & 0\\ X_{21}B_1^{-1} & 0\end{pmatrix},$$

其中,$X=(X_{ij})$.

从 $R(AB^{(1,2,3)}C)\subseteq R(D)$ 中知道

$$(I-DD^{\dagger})AB^{(1,2,3)}C=0,$$

即

$$(I-D_1F^{-1}D_1^{*})(A_1B_1^{-1}C_1+A_2X_{21}B_1^{-1}C_1)=0,$$

$$D_2F^{-1}D_1{}^{*}(A_1B_1^{-1}C_1+A_2X_21B_1^{-1}C_1)=0.$$

因此,从上面这2个等式以及 X_{ij} 的任意性可知

$$(I-D_1F^{-1}D_1^{*})A_2X_{21}B_1^{-1}C_1=0,$$

$$D_2F^{-1}D_1^{*}A_2X_{21}B_1^{-1}C_1=0. \tag{6}$$

如果 $B_1^{-1}C_1\neq0$,则根据(6)式可得

$$(I-D_1F^{-1}D_1^{*})A_2=0,$$

$$D_2F^{-1}D_1^{*}A_2=0. \tag{7}$$

因此,$(I-DD^{\dagger})A(I-BB^{\dagger})=0$,即 $R(A(I-BB^{\dagger}))\subseteq R(D)$.

如果 $B_1^{-1}C_1=0$,那么 $B^{\dagger}C=0$,即 $R(C)\subseteq N(B^{*})$.

显然有 $R(AB^{\dagger}C)\subseteq R(D)$. 所以,结论(ii)成立.

(ii)⇒(i) 由于 $R(A(I-BB^{\dagger}))\subseteq R(D)$ 和 $R(AB^{\dagger}C)\subseteq R(D)$,则存在 Y 使得 $A(I-BB^{\dagger})=DY$,存在 X 使得 $AB^{\dagger}C=DX$,那么

$$AB^{(1,2,3)}C=A(B^{\dagger}+(I-B^{\dagger}B)UB^{\dagger})C=AB^{\dagger}C+A(I-B^{\dagger}B)UB^{\dagger}C=D(X+YUB^{\dagger}C).$$

因此,$R(AB^{(1,2,3)}C)\subseteq R(D)$.

如果 $R(C)\subseteq N(B^{*})$,则 $B^{\dagger}C=0$,即 $AB^{(1,2,3)}C=0$,显然,$R(AB^{(1,2,3)}C)\subseteq R(D)$.

定理 3.2 设非零线性算子 $A\in L(H,K)$、$B\in L(H,M)$、$C\in L(N,M)$ 和 $D\in L(G,K)$ 有闭值域,则下面的结论等价:

(i) 对任意 $B^{(1,2,4)}\in B\{1,2,4\}$,$R(AB^{(1,2,4)}C)\subseteq R(D)$ 成立;

(ii) $R(C)\subseteq R(B)$ 和 $R(AB^{\dagger}C)\subseteq R(D)$;或者 $R(AB^{\dagger})\subseteq R(D)$.

证明 (i)⇒(ii) 根据引理1.1和引理1.2得

$$B^{(1,2,4)}=B^{\dagger}+B^{\dagger}X(I-BB^{\dagger})=\begin{pmatrix}B_1^{-1} & B_1^{-1}X_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

其中 $X=(X_{ij})$.

因 $R(AB^{(1,2,4)}C)\subseteq R(D)$ 等价于

$$(I-DD^{\dagger})AB^{(1,2,4)}C=0,$$

即

$$(I-D_1F^{-1}D_1^{*})(A_1B_1^{-1}C_1+A_1B_1^{-1}X_{12}C_2)=0,$$
$$D_2F^{-1}D_1^{*}(A_1B_1^{-1}C_1+A_1B_1^{-1}X_{12}C_2)=0.$$

因此,从上面的2个等式以及 X_{ij} 的任意性可知

$$(I-D_1F^{-1}D_1^{*})A_1B_1^{-1}X_{12}C_2=0,$$
$$D_2F^{-1}D_1^{*}A_1B_1^{-1}X_{12}C_2=0. \tag{8}$$

如果 $C_2\neq 0$,那么,由(8)式可知

$$(I-D_1F^{-1}D_1^{*})A_1B_1^{-1}=0,$$
$$D_2F^{-1}D_1^{*}A_1B_1^{-1}=0. \tag{9}$$

因此,$(I-DD^{\dagger})AB^{\dagger}=0$,即 $R(AB^{\dagger})\subseteq R(D)$.

如果 $C_2=0$,那么 $(I-BB^{\dagger})C=0$,所以 $R(C)\subseteq R(B)$.

显然,$R(AB^{\dagger}C)\subseteq R(D)$,所以得到结论(ii).

(ii)⇒(i) 由于 $R(AB^{\dagger}C)\subseteq R(D)$ 和 $R(C)\subseteq R(B)$,则存在 X 使得 $AB^{\dagger}C=DX$,存在 Y 使得 $C=BY$,那么

$$AB^{(1,2,4)}=A(B^{\dagger}+B^{\dagger}U(I-BB^{\dagger}))=AB^{\dagger}C+AB^{\dagger}U(I-BB^{\dagger})C=DX.$$

因此,$R(AB^{(1,2,4)}C)\subseteq R(D)$.

若 $R(AB^{\dagger})\subseteq R(D)$,则存在 X 使得 $AB^{\dagger}=DX$,那么

$$AB^{(1,2,4)}=A(B^{\dagger}+B^{\dagger}U(I-BB^{\dagger}))=AB^{\dagger}C+AB^{\dagger}U(I-BB^{\dagger})=D(XC+XU(I-BB^{\dagger})C).$$

所以,$R(AB^{(1,2,4)}C)\subseteq R(D)$.

定理 3.3 设非零线性算子 $A\in L(H,K)$、$B\in L(H,M)$、$C\in L(N,M)$ 和 $D\in L(G,K)$ 有闭值域,则下面的结论等价:

(i) 对任意 $B^{(1,3,4)}\in B\{1,3,4\}$,$R(AB^{(1,3,4)}C)\subseteq R(D)$ 成立;

(ii) $R(C)\subseteq R(B)$ 和 $R(AB^{\dagger}C)\subseteq R(D)$;或者 $R(A(I-BB^{\dagger}))\subseteq R(D)$ 和 $R(AB^{\dagger}C)\subseteq R(D)$.

证明 (i)⇒(ii) 根据引理1.1和引理1.2有

$$B^{(1,3,4)}=B^{\dagger}+(I-B^{\dagger}B)X(I-BB^{\dagger})=\begin{pmatrix}B_1^{-1} & 0\\ 0 & X_{22}\end{pmatrix},$$

其中 $X=(X_{ij})$.

因 $R(AB^{(1,3,4)}C)\subseteq R(D)$ 等价于

$$(I-DD^{\dagger})AB^{(1,3,4)}C=0,$$

即

$$(I-D_1F^{-1}D_1^{*})(A_1B_1^{-1}C_1+A_2X_{22}C_2)=0,$$
$$D_2F^{-1}D_1^{*}(A_1B_1^{-1}C_1+A_2X_{22}C_2)=0.$$

因此,由上面2个等式和 X_{ij} 的任意性可知

$$(I-D_1F^{-1}D_1^{*})A_2X_{22}C_2=0,$$
$$D_2F^{-1}D_1^{*}A_2X_{22}C_2=0. \tag{10}$$

若 $C_2\neq 0$,则根据(10)式可得到

$$(I-D_1F^{-1}D_1^{*})A_2=0,$$
$$D_2F^{-1}D_1^{*}A_2=0.$$

因此,$(I-DD^{\dagger})A(I-BB^{\dagger})=0$,即 $R(A(I-BB^{\dagger}))\subseteq R(D)$.

若 $C_2=0$,那么 $(I-BB^{\dagger})C=0$,所以 $R(C)\subseteq R(B)$.

显然,$R(AB^{\dagger}C)\subseteq R(D)$,则结论(ii)成立.

(ii)⇒(i) 由于 $R(AB^{\dagger}C)\subseteq R(D)$ 和 $R(C)\subseteq R(B)$,则存在 X 使得 $AB^{\dagger}C=DX$,存在 Y 使得 $C=BY$,那么

$$AB^{(1,3,4)}C=A(B^{\dagger}+(I-B^{\dagger}B)U(I-BB^{\dagger}))C=AB^{\dagger}C+A(I-B^{\dagger}B)U(I-BB^{\dagger})C=DX.$$

所以,$R(AB^{(1,3,4)}C)\subseteq R(D)$.

若 $R(A(I-BB^\dagger))\subseteq R(D)$ 和 $R(AB^\dagger C)\subseteq R(D)$,则存在 X 使得 $A(I-BB^\dagger)=DX$,存在 Y 使得 $AB^\dagger C=DY$,那么

$$AB^{(1,3,4)}C=A(B^\dagger+(I-B^\dagger B)U(I-BB^\dagger))C=$$
$$AB^\dagger C+A(I-B^\dagger B)U(I-BB^\dagger)C=$$
$$D(Y+XU(I-BB^\dagger)C).$$

所以

$$R(AB^{(1,3,4)}C)\subseteq R(D).$$

参考文献

[1] BEN - ISRAEL A, GREVILLE T N E. Generalized Inverse:Theory and Applications[M]. New York:Springer - Verlag,2003.

[2] RAO C R, MITRA S K. Generalized Inverse of Matrices and Its Applications[M]. New York:John Wiley & Sons,1971.

[3] PENROSE R. A generalized inverse for matrices[J]. Proc Cambridge Philosophical Soc,1955,51:406 - 413.

[4] WANG G, WEI Y, QIAO S. Generalized Inverses:Theory and Computations[M]. Beijing:Science Press,2004.

[5] 王宏兴,刘晓冀. 整环上矩阵的加权广义逆[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2009,32(6):734 - 737.

[6] 谢仲洲,刘晓冀. 一类四元数体上线性矩阵方程组的解一类四元数体上线性矩阵方程组的解[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2009,32(4):439 - 442.

[7] 何兴月,廖组华,胡森涵,等. Quantale 矩阵的加权 M - P 广义逆[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2012,35(3):340 - 344.

[8] CVEKOVIACUTEC - ILIACUTEC D S, HARTE R. Reverse order laws in C^* - algebras[J]. Linear Algebra Appl,2011,434:1388 - 1394.

[9] BAKSALARY J K, KALA R. Range invariance of certain matrix products[J]. Linear and Multilinear Algebra,1983,14(1):89 - 96.

[10] BAKSALARY J K, MATHEW T. Rank invariance criterion and its application to the unified theory of least squares[J]. Linear Algebra and Its Applications,1990,127:393 - 401.

[11] BAKSALARY J K, PUKKILA T. A note on invariance of the eigenvalues, singular values, and norms of matrix products involving generalized inverse[J]. Linear Algebra and Its Applications,1992,165:125 - 130.

[12] XIONG Z, QIN Y. An invariance property related to the mixed - type reverse order laws[J]. Linear and Multilinear Algebra,2015,63,8:1621 - 1634.

[13] BAKSALARY J K, BAKSALARY O M. An invariance property related to the reverse order law[J]. Linear Algebra and Its Applications,2005,410:64 - 69.

[14] XIONG Z, QIN Y. Invariance properties of an operator product involving generalized inverses[J]. Electronic J Linear Algebra,2011,22:694 - 703.

[15] GROSS J, TIAN Y. Invariance properties of a triple matrix product involving generalized inverses[J]. Linear Algebra and Its Applications,2006,417:94 - 107.

[16] LIU X J, ZHANG M, YU Y M. Note on the invariance properties of operator products involving generalized inverses[J]. Abstract and Applied Analysis,2014,2014:9.

[17] DJORDJEVICD S, DINČICN Č. Reverse order law for the Moore - Penrose inverse[J]. J Math Anal Appl,2010,361:252 - 261.

The Invariance Properties of Operator Products Involving Generalized Inverses

FU Shiqin, LIU Xiaoji

(*College of Mathematics and Computer Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning 530006, Guangxi*)

Abstract: The invariance of the generalized inverse product plays an important role in the theoretical research. Many researchers illustrated the invariance of the matrix product by the method of rank. In recent years, the authors studied the invariance of the generalized inverse operator product and presented some results. In this paper, we investigate the invariance properties of the bounded linear operator products $AC^{(1,2,3)}B^{(1,2,3)}D$, $AC^{(1,2,4)}B^{(1,2,4)}D$, $AC^{(1,3,4)}B^{(1,3,4)}D$ using the matrix form of operator and present the equivalent conditions for the invariance properties. Also, we study the range inclusion invariance properties of the operator product involving generalized inverses and establish the relationship between invariance properties and its range under some equivalent conditions.

Key words: generalized inverse; invariance properties; operator product

2010 MSC: 15A09; 65F10

(编辑 李德华)